4CCENDMMT02-P

# PROBABILIDADE E CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Girlan de Lira e Silva [(1)] ,José Gomes de Assis [(3)]
Centro de Ciências Exatas e da Natureza /Departamento de Matemática /MONITORIA

**Resumo:**

Utilizamos o Cálculo Diferencial e Integral em algumas aplicações à teoria da Probabilidade no intuito de ilustrar alguns aspectos da teoria da Probabilidade.Este tratamento é uma generalização dos conceitos de probabilidade visto nos cursos de graduação.

**Palavra-chaves:**Variáveis Aleatórias, Cálculo, Probabilidade

## 1. Introdução:

Neste trabalho utilizamos o Cálculo Integral em algumas aplicações à teoria da Probabilidade. Para tanto, apresentamos o conceito de variáveis aleatórias discretas e contínuas, valor esperado, variância, variáveis aleatórias exponenciais e normais, variáveis aleatórias geométricas e de Poisson.

## 2.Descrição:

### 2.1 Variáveis Aleatórias Discretas

Os conceitos de média, desvio-padrão e variância serão abordados a partir das notas de um exame.

Consideremos a tabela abaixo:

| NOTAS ($X_i$) | 50 | 60 | 70 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|
| FREQUÊNCIA ($f_i$) | 1 | 2 | 2 | 1 | 4 |

Média ( $\overline{X}$ )= $(Xi \cdot fi)\left(\frac{1}{n}\right)$ = $(50\cdot1+60\cdot2+70\cdot2+90\cdot1+100\cdot4)\left(\frac{1}{10}\right)$ = 80

Para medir como as médias se distribuem, calcula-se a média dos quadrados da diferença entre as notas e a média e chamam o resultado de variância da distribuição das notas:

| Notas ($x_i$) - Média( $\overline{X}$ ) | -30 | -20 | -10 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| Freqüência ($f_i$) | 1 | 2 | 2 | 1 | 4 |

Assim, temos:

Variância = $\frac{\Sigma(xi-\overline{x})^2 fi}{n} = \frac{(-30)^2\cdot1+(-20)^2\cdot2+(-10)^2\cdot2+(10)^2\cdot1+(20)^2\cdot4}{10}$ = 360

A raiz quadrada da variância é denominada de desvio-padrão da distribuição das notas:

Desvio-padrão = $\sqrt{360} \approx 18{,}97$.

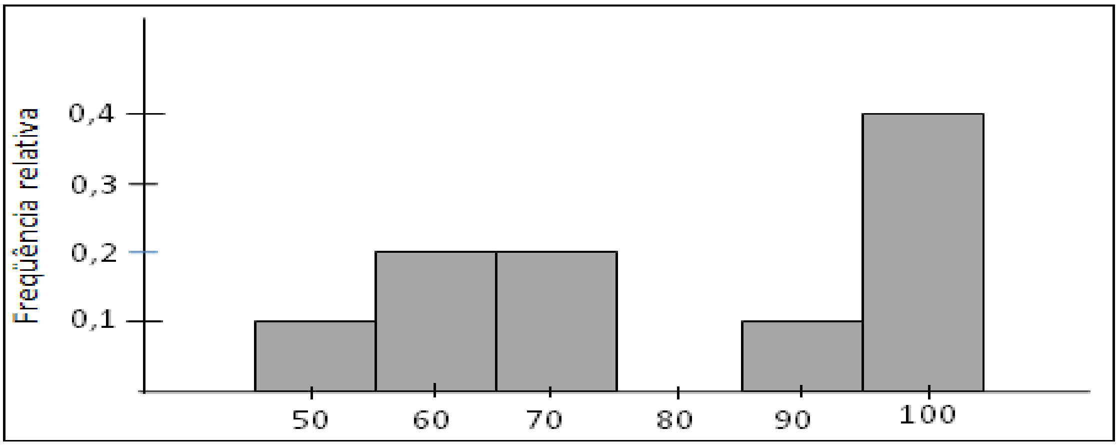
[1)] Bolsista, [(2)] Voluntário/colaborador, [(3)] Orientador/Coordenador [(4)] Prof. colaborador, [(5)] Técnico colaborador.

Outra maneira de se olhar para a distribuição das notas, média e variância é considerar a freqüência relativa:

| Notas ($x_i$) | 50 | 60 | 70 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|
| Freqüência Relativa $\left(\frac{fi}{n}\right)$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{4}{10}$ |

**Tabela de probabilidades**

Este novo ponto de vista é bastante útil, pois pode ser generalizado para outras situações. Os dados de uma tabela de freqüências relativas pode ser exibido através de um histograma de freqüências relativas:




**Histograma de freqüências relativas**

Assim sendo, outra maneira de calcular média e a variância é:

Média( $\overline{X}$ ) = $\Sigma\, x_i \cdot fr_i = 50 \cdot \frac{1}{10} + 60 \cdot \frac{2}{10} + 70 \cdot \frac{2}{10} + 90 \cdot \frac{1}{10} + 100 \cdot \frac{4}{10} = 80$

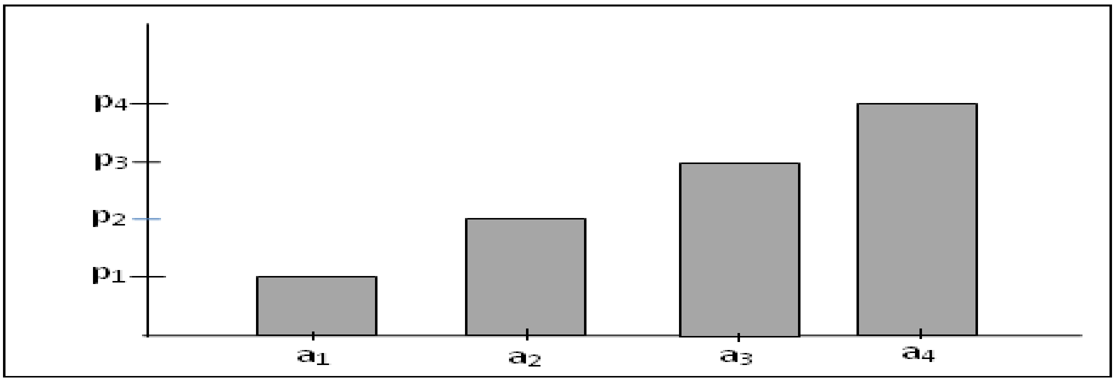
Variância = $\Sigma\,(x_i - \overline{x})^2 \cdot fr_i = (-30)^2 \cdot \frac{1}{10} + (-20)^2 \cdot \frac{2}{10} + (-10)^2 \cdot \frac{2}{10} + (-10)^2 \cdot \frac{1}{10} + (20)^2 \cdot \frac{4}{10} = 360$

Agora, seja os resultados de um experimento $a_1$, $a_2$, . . ., $a_n$, com as respectivas probabilidades $p_1$, $p_2$, . . . , $p_n$ , então:

| Resultado | $a_1$ | $a_2$ | ... | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|
| Probabilidade | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

Onde: $0 \leq P_i \leq 1$ e $p_1 + p_2 + . . . + p_n = 1$

É possível exibir os dados de uma tabela de probabilidades na forma de um histograma (figura):




O valor esperado (media) da tabela de probabilidade é definido como sendo a soma ponderada dos resultados $a_1$, $a_2$,..., $a_n$, com peso igual à probabilidade de sua ocorrência associado a cada resultado, isto é:

$$\text{Valor esperado} = a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + \ldots + a_n \cdot p_n$$

Assim como, a variância de uma tabela de probabilidades é a soma ponderada dos quadrados das diferenças entre cada resultado e o valor esperado:

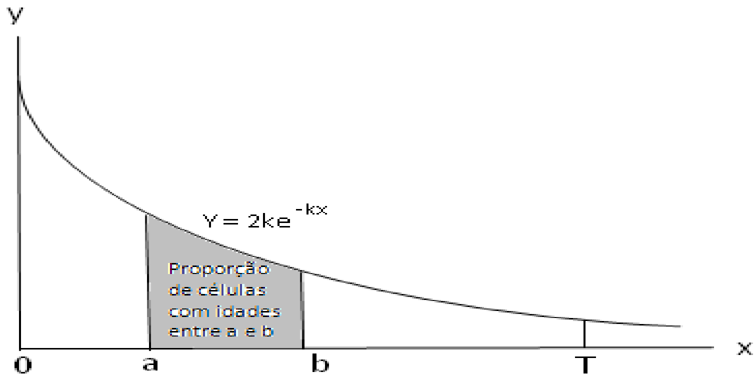
$$\text{Variância} = (a_1 - m)^2\, p_1 + (a_2 - m)^2\, p_2 + \ldots + (a_n - m)^2\, p_n$$

Considerando que X é uma variável que pode assumir valores $a_1$, $a_2$,..., $a_n$ com probabilidade $p_1$, $p_2$,..., $p_n$, respectivamente. Os experimentos são realizados muitas vezes, sendo cada realização idêntica e independente das outras.Então X é uma variável cujo valor depende de chance, e por essa razão dizemos que X é uma variável aleatória. Assim, denota-se o valor esperado de X por E(X), e a variância de X por V(X).

2.2 **Variáveis Aleatórias Contínuas**

Considere uma população de células crescendo vigorosamente. Se a população é suficientemente grande, ele irá conter células com varias idades entre 0 e T. Sendo a e b dois números quaisquer entre 0 e T, com a < b, a proporção de células com idades entre a e b é essencialmente constante no tempo.

Considerando um experimento que seleciona uma célula da população aleatoriamente e observe a sua idade, X. Então a probabilidade de que X esteja entre a e b é dada pela área sob o gráfico de $f(x) = 2ke^{-kx}$ de a e b.




**Distribuição de idades em uma população de células**

Essa probabilidade é dada por $P(a \leq x \leq b)$. Utilizando o fato de que a área sob o gráfico de f(x) é dada por uma integral definida, temos:

$$P(a \leq x \leq b) = \int f(x)\,dx = \int 2ke^{-kx}dx.$$

Como X pode assumir qualquer valor no intervalo contínuo de O a T, dizemos que X é uma variável aleatória continua. A função f(x) que determina a probabilidade para cada a e b é chamada de função densidade de probabilidade de X ou de experimento cujo resultado é X.

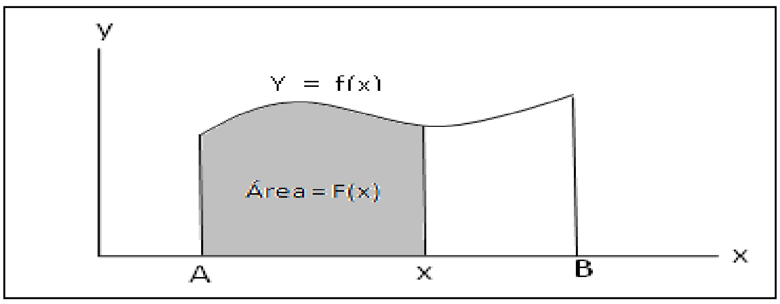
Em geral, para experimentos de interesse pratico envolvendo uma variável aleatória continua X, é possível encontrar uma função f(x) tal que:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\ dx$$

Para todo a e b no conjunto dos possíveis valores de X. Tal função f(x) é chamada de uma função densidade de probabilidade se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f(x) \geq 0$, para $A \leq x \leq B$ e 2. $\int f(x) = 1$

Considerando um experimento cujo resultado seja uma variável aleatória continua X, com valores entre A e b, e seja f(x) a função densidade associada. Para cada numero entre A e B, seja f(x) a probabilidade de que X seja menor ou igual ao numero x.Algumas vezes é escrito $F(x) = P(X \leq x)$; entretanto, como x nunca é menor do que A, podemos também escrever: $F(x) = P(A \leq X \leq x)$.




**A função distribuição cumulativa F(x)**

Graficamente, F(x) é a área sob o gráfico da função densidade de A a x (figura acima). A função é chamada função distribuição cumulativa da variável aleatória X (ou do experimento cujo resultado é X) e tem as seguintes propriedades:

F(A) =P(A ≤ X ≤ A) = 0 (1) e F(B) = P(A ≤ X ≤ b) = 1 (2)

Como F(x) é uma "função área" que fornece a área sob o gráfico de f(x) de A a x, sabemos, que F(x) é uma antiderivada de f(x), isto é:

F`(x) = f(x), A ≤ x ≤ B

A função F(x) é utilizada para calcular probabilidades P(a ≤ X ≤ b) = $\int_a^b f(x)\,dx$ = F(b) – F(a) ,para qualquer a e b entre A e B.

Observação: A probabilidade de uma variável aleatória discreta tem de ser calculada considerando somas, pois tem um número finito de possíveis resultados, isto é, não é contínua, enquanto que em uma variável aleatória continua é utilizado o conceito matemático de integral devido que uma variável aleatória contínua pode assumir qualquer (muitíssimos) valores num intervalo contínuo considerado.

Logo, para utilizar integral necessário é que uma determinada variável aleatória seja continua, sendo discreta, utiliza-se a soma de intervalos considerados.

A função F(x) é a área sob o gráfico da função densidade de f(x) de A a x.A função é chamada de primitiva da função densidade de probabilidade. E, pelo teorema fundamental do cálculo:

P(a ≤ x ≤ b) = ∫f(x) dx = F(b) – F(a), para qualquer a e b entre A e B.

Exemplo: Seja f(x) = k . $x^2$

a) Encontre o valor de k que faz com que f(x) seja uma função densidade de probabilidade em 0 ≤ x ≤ 4.

b) Seja X uma variável aleatória contínua suja função densidade é f(x).Calcule Pr(1 ≤ X ≤ 2).

Solução:

a) Precisamos ter k ≥ 0, de forma que a propriedade **I** esteja satisfeita.Da propriedade **II**, calculamos:

$$\int_0^4 kx^2\,dx = \left[\frac{1}{3}kx^3\right]_0^4 = \frac{1}{3}k(4)^3 - 0 = \frac{64}{3}k$$

Assim, para satisfazer a Propriedade II devemos ter $\frac{64}{3}k = 1$, ou k= $\frac{3}{64}$. Portanto f(x) = $\frac{3}{64}x^2$.

b) P(1 ≤ X ≤ 2) = $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{3}{64}x^2 dx = \left[\frac{1}{64}x^3\right]_1^2 = \frac{8}{64} - \frac{1}{64} = \frac{7}{64}$

2.3 **Valor Esperado e Variância**

Seja X uma variável aleatória continua cujos possíveis valores estão entre A e B, e seja f(x) a função de distribuição de probabilidade de X. Então, o valor esperado de X é o numero E(x) definido por:

$$E(x) = \int x \cdot f(x)\, dx$$

A variância de X é o numero V(x) definido por:

$$V(x) = \int [x - E(x)]^2 \cdot f(x)dx$$

O valor esperado de X tem a mesma interpretação que foi considerada no caso discreto, ou seja, se o experimento cujo resultado é X for realizado muitas vezes, então a média de todos os resultados será aproximadamente igual a E(x).Como no caso de variáveis aleatórias discretas, a variância de X é uma medida quantitativa de como os valores estão espalhados em torno da média E(x) quando o experimento é realizado muitas vezes.

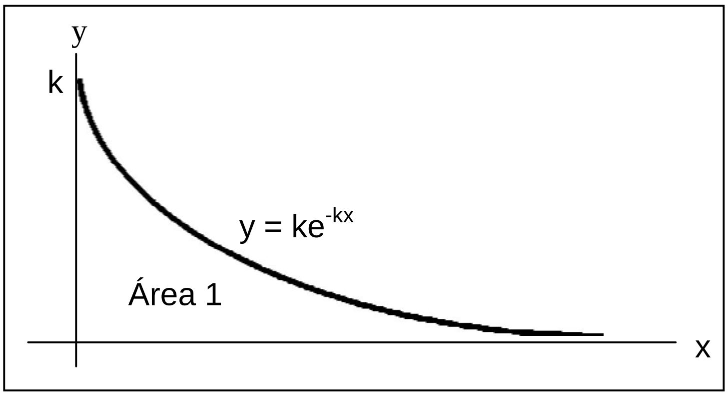
Seja X uma variável aleatória continua cujos possíveis valores estão situados entre A e B, e seja f(x) a função densidade para X. Então:

$$V(x) = \int_A^B x^2 f(x)\, dx - E(x)^2$$

2.4 **Variáveis Aleatórias Exponenciais e Normais**

As funções exponencial e normal estão associada a variáveis aleatórias que surgem em uma grande variedade de aplicações.

***Funções densidade exponencial*** – Seja K um numero positivo. Então a função: $f(x) = ke^{-kx}$, $x \geq 0$ é chamada de função densidade exponencial (figura abaixo).




**Função de densidade exponencial**

Esta função é de fato uma função densidade de probabilidade dado que:

1. $F(x) \geq 0$ e 2. $\int_0^\infty ke^{-kx}\, dx = 1$

Uma variável aleatória X com uma função densidade exponencial á chamada de uma variável aleatória exponencial, e os valores de X são ditos exponencialmente distribuídos.

Seja X uma variável aleatória com, uma função densidade exponencial f(x) = ke$^{-kx}$ (x ≥ 0).Então:

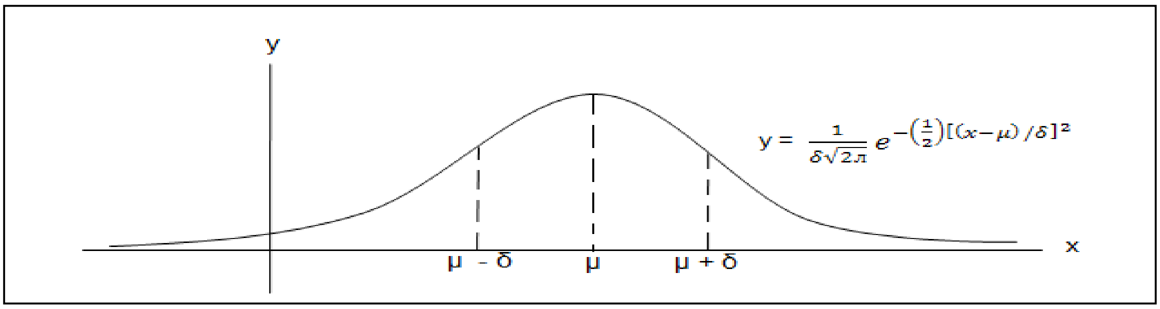
$$E(x) = \frac{1}{k} \qquad e \qquad V(x) = \frac{1}{k^2}$$

***Funções Densidade Normal*** – Sejam μ, δ números dados, com δ > 0. Então a função:

$$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)[(x-\mu)/\delta]^2} \qquad (4)$$

é chamada de função densidade normal.Uma variável aleatória X cuja função distribuição tem esta forma é chamada de variável aleatória normal, e os valores de X são ditos distribuídos normalmente.

O gráfico da função densidade em (4) é chamada de uma curva normal (figura abaixo).




**Função densidade normal**

Uma curva normal é simétrica em relação à reta x = μ e tem pontos de inflexão em μ - δ e μ + δ. Seja uma variável aleatória com uma função densidade normal:

$$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)[(x-\mu)/\delta]^2}$$

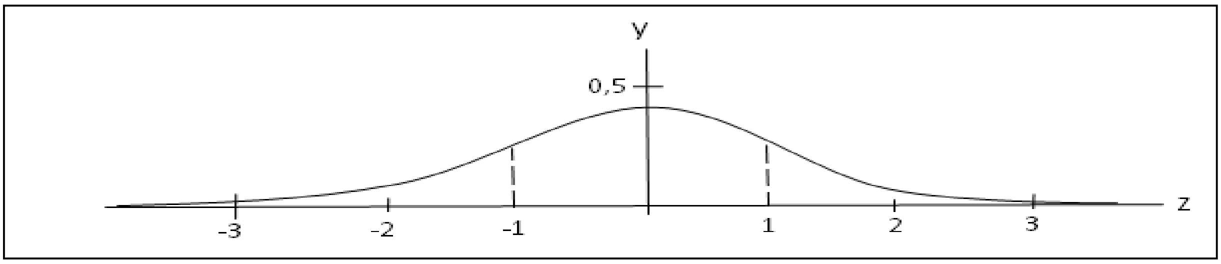
Então o valor esperado (média), a variância e o desvio-padrão de X são dados por

$$E(X) = \mu \text{ , } V(X) = \delta^2 \text{ e } \sqrt{V(X)} = \delta$$

Uma variável aleatória normal com valor esperado μ = 0 e desvio-padrão δ = 1 é chamada de variável aleatória normal standard e é freqüentemente denotada pela letra Z. Utilizando estes valores e μ e δ em (4), e escrevendo Z em lugar da variável X, vemos que a função densidade para Z é:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)z^2} dx$$

O gráfico dessa função é chamado de curva normal standard (Figura abaixo).

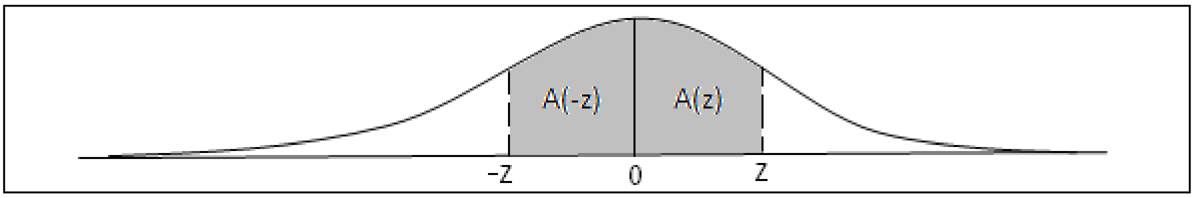



**Curva Normal Standard**

Probabilidades envolvendo uma variável aleatória normal standard Z podem ser escritas na forma

$$P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\left(\frac{1}{2}\right)z^2}\ dx$$

Tal integral não pode ser calculada diretamente porque a função densidade para Z não pode ser antidiferenciada em termos de funções elementares. Entretanto, tabelas de tais probabilidades podem ser encontradas. Para Z ≥ 0, sejam A(Z) = P (0 ≤ Z ≤ z) e A (-Z) = P (-z ≤ Z ≤ 0), isto é, sejam A(Z) e A (-Z) as áreas das regiões que estão indicadas na figura abaixo.Da simetria da curva normal standard, fica claro que A (-Z) = A(Z).




**Área sob a curva normal standard**

2.5 **Variáveis Aleatórias Geométricas e de Poisson**

Os modelos probabilísticos destes tipos de variáveis envolvem uma variável aleatória X, cujos valores são números discretos 0, 1, 2,... Usualmente não há um limite superior que valores extremamente grandes sejam muitos improváveis.

***Variáveis Aleatórias de Poisson*** – Em vários experimentos, as probabilidades $P_n$ envolvem parâmetro λ (dependendo do particular experimento), e têm a seguinte forma especial:

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n!}\ e^{-\lambda} \qquad (1)$$

Uma variável aleatória X cujas probabilidades são dadas pela formula (1) é chamada de variável aleatória de Poisson, e as probabilidades de x formam uma distribuição de Poisson com parâmetro λ.

Seja uma variável aleatória cujas probabilidades correspondem a uma distribuição de Poisson com parâmetro λ, isto é,

$$P_0 = e^{-\lambda} \qquad P_n = \frac{\lambda^n}{n!}\ e^{-\lambda} \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

Então o valor esperado e a variância de X são dados por E(x) = λ e V(x) = λ.

Exemplo: Amostras do tamanho de uma gota são colhidas de uma lagoa em New England.O número de protozoários em varias amostras distintas são contados, e o número encontrado é 8,3.Qual a probabilidade de que uma amostra escolhida aleatoriamente contenha no máximo quatro protozoários.

Solução:

Sob a hipótese de que os protozoários estão espalhados pela lagoa, sem que formem aglomerados, o número de protozoários por gota é uma variável aleatória de Poisson, que denotaremos por X.A partir dos dados experimentais, afirmamos que E(x) = 8,3.Como λ = E(x), as probabilidades para X são dadas por:

$P_n = \frac{8{,}3^n}{n!} e^{-8{,}3}$, a probabilidade de no máximo quatro é P(X ≤ 4).Utilizando uma calculadora para gerar as probabilidades, encontramos

$P(X \leq 4) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}00025+0{,}00206+0{,}00856+0{,}02368+0{,}04914 = 0{,}08369$

A probabilidade de que no máximo quatro protozoários sejam encontrados é aproximadamente 8,4%.

***Variáveis Aleatórias Geométricas*** – Considerando os resultados de um experimento como sendo sucesso ou fracasso, e a tentativa sendo repetida ate que um insucesso ocorra, o resultado do experimento é o numero de sucessos (0,1, 2,...) que precedem o primeiro insucesso.Se para algum numero p entre 0 e 1 as probabilidades para X têm a forma:

$P_0 = 1 - p$ ; $P_1 = p(1 - p)$ ; $P_n = p^n (1 - p)$ (2)

então X é chamada de variável aleatória geométrica, e as probabilidades para X formam uma distribuição geométrica com parâmetro p.Nesse caso, cada tentativa do experimento tem a mesma probabilidade p de sucesso (a probabilidade de insucesso é 1 – p).Também, o resultado de cada tentativa é independente das outras tentativas.

O termo geométrico é associado com a fórmula (2) porque as probabilidades formam uma série geométrica, com termo inicial a = 1 – p e razão r = p .A soma da série é

$$p_0+p_1+p_2+\ldots = \frac{a}{1-r} = \frac{1-p}{1-p} = 1$$

Seja X uma variável aleatória geométrica com parâmetro p, isto é,

$$p_n = p^n (1 - p) \qquad (n = 0,1,\ldots)$$

Então o valor esperado e a variância de X são dados por

$$E(X) = \frac{p}{1-p}, \qquad V(X) = \frac{p}{(1-p)^2}$$

**Metodologia:**

Problematizamos a temática e a partir daí construímos os conceitos estatísticos utilizando as ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral.

**Resultados:**

Apreendemos os conceitos de média, variância, desvio-padrão.Variáveis aleatórias contínuas, exponenciais, normais, valor esperado e variância estudados a partir da utilização de integral, e variáveis aleatórias geométricas e de Poisson podendo ser utilizadas em situações que envolvem contagem.

**Conclusão:**

Concluímos como o Cálculo Diferencial e Integral é aplicado a alguns aspectos da teoria da probabilidade e como através deles é possível chegar a resultados que podem ser úteis para aplicações reais.

**Referências:**

Ávila, Geraldo.Cálculo das Funções de uma variável, vol I 7º ed. LTC.

Larry J.Goldstein, David C. Lay e David I. Schneider; trad. Henrique Von Dreifus. Matemática Aplicada: economia, administração e contabilidade. Porto Alegre: Bookman, 2000.