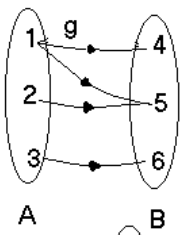
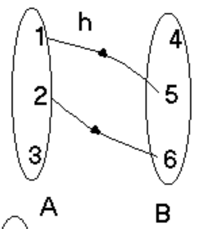
Estudo da Função: Sejam dois conjuntos A e B e seja f uma relação de A em $B.$

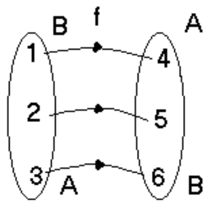
Diz-se que f é uma função de A em B se, e somente se, para todo elemento $x \in A$ existir um único elemento $y \in B,$ tal que $(x;.y) \in f.$

Exemplo: Considere os conjuntos $A = \{1,.2,.3\}$ e $B = \{4,.5,.6\}$ e as relações $g,$ h e $f,$ de A em $B,$ dadas por:

$g = \{(1;.4),.(1;.5),(2;.5),.(3;.6)\};$
$h = \{(1;.5),.(2;.6)\};$
$f = \{(1;.4),.(2;.5),.(3;.6)\}.$







Observe, então, que:

- na relação $g,$ o elemento $1 \in A$ associa-se com dois elementos distintos de B (o 4 e o 5); isto contraria a definição de função. Portanto, g não é uma função de A em $B.$
- na relação $h,$ o elemento $3 \in A$ não se associa com nenhum elemento de $B;$ o que também contradiz a definição de função. Logo, $h,$ também, não é função de A em $B.$
- na relação $f,$ não existe elemento de A que não esteja associado a algum elemento de $B,$ e mais ainda cada elemento de A está associado com um único elemento de $B.$ Portanto, a relação f é uma função de A em $B.$

Domínio de uma função Se f é uma função de A em $B,$ o conjunto de partida A passa a ser chamado de domínio da função f e o conjunto $B,$ contradomínio de $f.$

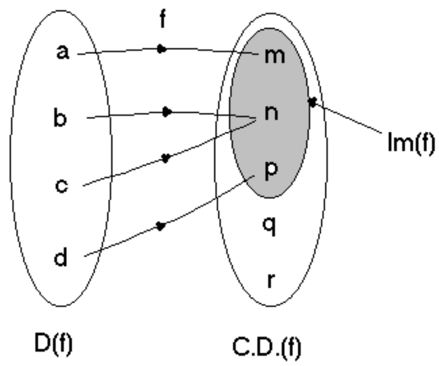
$A = D(f) =$ domínio de f

$B = C.D.(f) =$ contradomínio de f

Exemplo: Considere a relação f do exemplo anterior. O domínio é o conjunto $A = \{1,.2,.3\}$ e o contradomínio é o conjunto $B = \{4,.5,.6\}.$

A imagem de uma função Vamos agora destacar um subconjunto importante do contradomínio de $f.$ Esse subconjunto, denominado imagem de $f,$ e indicado por $\mathrm{Im}(f),$ é formado pelos elementos do contradomínio que são de fato imagens de elementos do domínio.

Por exemplo, no diagrama seguinte:



A imagem de f é formada pelos elementos $m,$ n e p (observe que q e r não são extremidades de flechas, ou seja, não são imagens de elementos do domínio). Para esse diagrama, temos:

$$\mathrm{Im}(f) = \{m,.n,.p\}$$

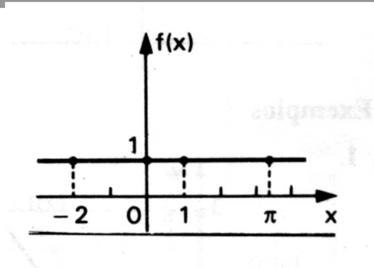
Função constante É a função que associa a todo número real x um mesmo número real. Isto é: $f: IR \to IR,$ com $f(x) = k$ ($\forall .x \in IR$).

Gráfico**:** o gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo dos $x,$ e que intercepta o eixo y no ponto $(0;.k).$

Exemplo: Dada a função $f: IR \to IR,$ definida por $f(x) = 1$ temos que:

para $x = 0,$ $f(0) = 1;$ para $x = 1,$ $f(1) = 1;$

para $x = -2,$ $f(-2) = 1;$ para $x = \pi,$ $f(\pi) = 1$ etc.



Função polinomial do 1º grau

Função polinomial, ou função afim, é aquela que associa a todo número real x, o número real $ax+b$ (sendo a e b números reais quaisquer e $a \neq 0$). Simbolicamente temos:

$f: IR \to IR$, sendo $f(x)=ax+b;\ a \neq 0$

Exemplos:

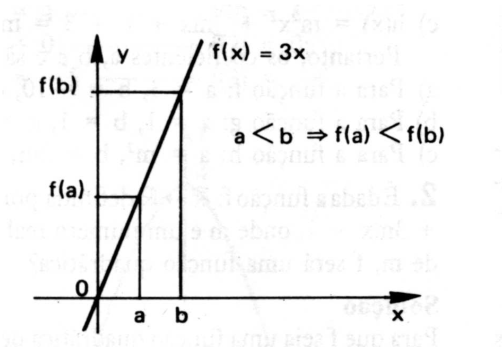
1- $f(x)=2x+1$ 2- $y=-2x-5$

3- $f(x)=3x$ (neste caso particularmente como $b=0$ a função é também chamada linear).

Gráfico: o gráfico da função $f(x)=ax+b$ é uma reta não paralela aos eixos x e y.

1º caso: $a>0$ (função crescente)

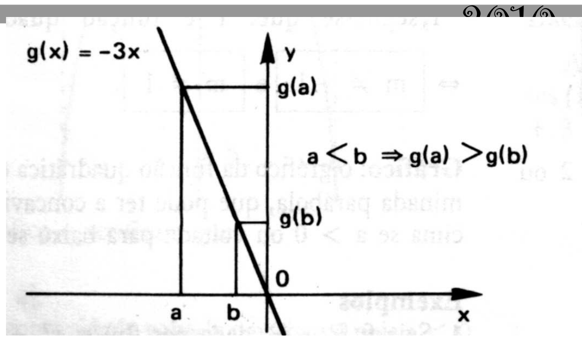
Exemplo: A função $f: IR \to IR$, definida por $f(x)=3x$, é crescente em IR.



$D(f)=IR$ e $\text{Im}(f)=IR$

2º caso: $a<0$ (função decrescente)

Exemplo: A função $g: IR \to IR$, definida por $g(x)=-3x$, é decrescente em IR.



$D(g)=IR$ e $\text{Im}(g)=IR$

Equações de 1º grau

Equação de 1º grau em IR, na incógnita x, é toda igualdade do tipo:

$ax+b=0$

ou redutível a esse tipo, onde a e b são números reais e a é não nulo.

Observe que a equação é de 1º grau, pois a incógnita x tem maior expoente igual a 1.

O valor da incógnita x, se existir, chama-se raiz ou solução da equação; é o número que, substituído "no lugar de x", transforma a equação numa igualdade numérica; o conjunto formado pelas raízes de uma equação chama-se conjunto-solução da equação e será indicado por S.

Exemplos:

1- Para resolver a equação:

$$\frac{2x-1}{2}-\frac{(3x-2)}{3}=\frac{4x-3}{4}$$

"tiramos" o m.m.c. dos denominadores, que neste caso é 12, e reduzimos todas as frações ao mesmo denominador:

$$\frac{6(2x-1)}{12}-\frac{4(3x-2)}{12}=\frac{3(4x-3)}{12}$$

"cortamos" o denominador comum:

$$6(2x-1)-4(3x-2)=3(4x-3)$$

abrimos os parênteses:

$$\cancel{12x}-6-\cancel{12x}+8=12x-9$$

isolamos o termo em x no segundo membro:

$-6+8+9=12x$ ou $11=12x$

passamos 12 para o primeiro membro, dividindo 11 e obtendo:

$$\frac{11}{12}=x.$$

Então, o conjunto-solução da equação é: $S=\left\{\frac{11}{12}\right\}$

2- Para resolver a equação $3x+2-3(x+1)=0$

abrimos os parênteses: $\cancel{3}x+2-\cancel{3}x-3=0$ ou $-1=0$.

A conclusão absurda a que chegamos tem um significado muito simples: não existe valor algum da incógnita x que satisfaça a equação proposta. Em outras palavras, a equação é impossível e seu conjunto-solução S é vazio, ou seja, $S=\phi$

3- Para resolver a equação, em IR,

$$2(x+1)-3x+2-(4-x)=0$$

abrimos os parênteses:

$$2x+2-3x+2-4+x=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x-3x+x=-2-2+4$$
$$0=0$$

Na verdade, essa igualdade é equivalente a: $0x=0$ que é verdadeira para qualquer valor de x; portanto o conjunto-solução é: $S=IR$.

Inequações de 1º grau

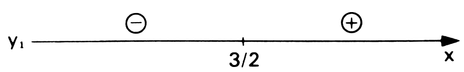
Inequações do 1º grau são aquelas redutíveis à forma $ax+b>0$, onde $a\neq 0$ (ou $\geq,. <,. \leq,. \neq$).

Resolver uma inequação é encontrar o conjunto de valores para x que satisfaz a desigualdade.

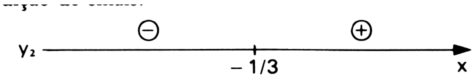
Exemplos:

1- Resolver a inequação $(2x-3)(3x+1)(-x+2)\leq 0$

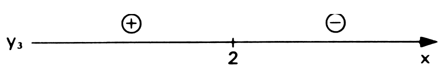
Para $y_1=2x-3$, temos a raiz $\frac{3}{2}$ e a seguinte variação de sinais:



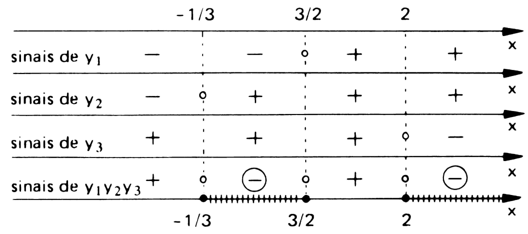
Para $y_2=3x+1$, temos a raiz $-\frac{1}{3}$ e a seguinte distribuição de sinais:



Para $y_3=-x+2$, temos a raiz 2 e a seguinte variação de sinais:



Quadro de sinais:



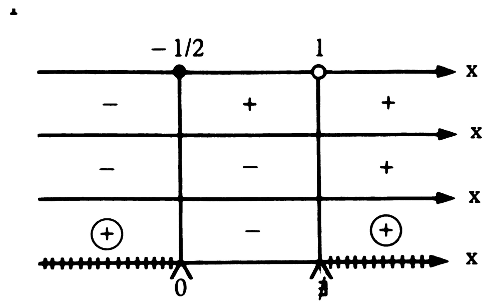
Como queremos $y_1y_2y_3\leq 0$, segue-se:

$$S=\left\{x\in IR \middle| -\frac{1}{3}\leq x\leq\frac{3}{2} \text{ ou } x\geq 2\right\}$$

2- Dar o domínio da função $h(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}$.

Na função $h(x)$, devemos ter o quociente $\dfrac{2x+1}{x-1}$ (que é o radicando) maior ou igual a zero, para que a função esteja definida. Portanto, teremos para resolver uma inequação do tipo quociente:

$$\frac{2x+1}{x-1}\geq 0$$



$$D=\left\{x\in IR \middle| x\leq -\frac{1}{2} \text{ ou } x>1\right\}$$

EXERCÍCIOS

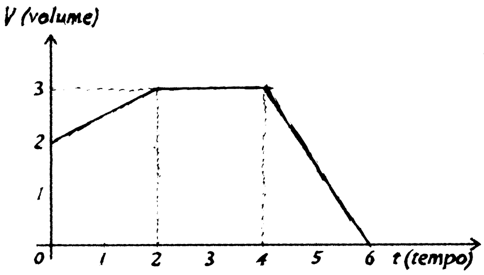
1- Represente graficamente e determine o domínio e a imagem das seguintes funções:

a) $f(x)=x-2$ b) $f(x)=-2x-4$

c) $f(x)=(x+3)^2+(x-2)^2$.

2- A reta r que passa pelos pontos $P(1,2)$ e $Q(3,3)$ é o gráfico da função $y = ax + b$. Determine as constantes a e b.

3- (UFPB) O gráfico abaixo mostra a variação do volume V, em m^3, de um recipiente em função do tempo t, dado em minutos, a partir de um tempo inicial $t = 0$.



Com base nesse gráfico, é correto afirmar:

a) O recipiente estava, inicialmente, vazio.

b) O volume do recipiente começou a aumentar, somente após os 4 minutos iniciais.

c) O volume mínimo do recipiente foi $1m^3$.

d) O recipiente estava, no terceiro minuto, com o volume máximo.

e) O volume atingiu o mínimo, nos 4 minutos iniciais.

4- (ITA-SP) Seja $f : IR \rightarrow IR$ a função definida por $f(x) = ax + b$ onde $a \in IR^*$ e $b \in IR$. Se $\alpha \in IR$, $\beta \in IR$ e $\alpha \neq \beta$, demonstre que $\dfrac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} = a$.

5- (MACK-SP) Sejam $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4, 5\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x - 1\}$. O domínio e a imagem dessa relação são:

a) $\{1, 3\}$ e $\{1, 5\}$

b) $\{0, 1, 2\}$ e $\{2, 4\}$

c) $\{0, 1, 2, 3\}$ e $\{1\}$

d) A e B

6-(PUC-RS) A relação R de $A = \{x \in Z \mid -1 \leq x \leq 1\}$ em $B = \{y \in IR \mid 0 \leq y < 2\}$, definida por $y = 1 - x$, é

a) $\{(-1, 0), (0, 1)\}$

b) $\{(0, 1), (1, 0)\}$

c) $\{(-1, 0), (0, 1), (1, 0)\}$

d) $\{(-1, 0), (0, 1), (1, 2)\}$

e) $\{(-1, 2), (0, 1), (1, 0)\}$

7- (UFPA) Qual das relações de $A = \{1, 2\}$ em $B = \{3, 4, 5\}$, dadas abaixo, é uma função?

a) $\{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$

b) $\{(1, 3), (2, 5)\}$

c) $\{(1, 3), (2, 4), (2, 5)\}$

d) $\{(1, 4), (1, 5)\}$

e) $\{(2, 3), (2, 4)\}$

8- (Cescem) Se $f(x) = a + 1$ e $g(z) = 2z + 1$, então $g(f(x))$ vale:

a) $2a + 2$ b) $a + 4$ c) $2a - 3$

d) $2a + 3$ e) $a + 3$

9- (Mack) Sejam f dada por $f(x) = 2x - 1$ e g dada por $g(x) = x + 1$. Então $g(f(2))$ é igual a:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

10- (F. C. Chagas-BA) A função inversa da função

$f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 3}$ é:

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 3}{2x - 1}$ b) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$

c) $f^{-1}(x) = \dfrac{1 - 2x}{3 - x}$ d) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 2}$

e) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x + 1}{2 - x}$

11- Considere a função invertível $f : IR \rightarrow IR$ definida por $f(x) = 2x + b$, onde b é uma constante. Sendo f^{-1} a sua inversa, qual o valor de b, sabendo-se que o gráfico de f^{-1} passa pelo ponto $A(1, -2)$?

a) -2 b) -1 c) 2 d) 3 e) 5

12- (PUC-SP) Para que a função do 1º grau dada por $f(x) = (2 - 3k)x + 2$ seja crescente, devemos ter:

a) $k = \dfrac{2}{3}$ b) $k < \dfrac{2}{3}$ c) $k > \dfrac{2}{3}$

d) $k < -\dfrac{2}{3}$ e) $k > -\dfrac{2}{3}$

13- (UF-S. Carlos) O conjunto solução do sistema de inequações $\begin{cases} 3x-1>5x+2 \\ 4x+3<7x-11 \end{cases}$ é:

a) $S=\left\{x\in IR \middle| x<-\dfrac{3}{2} \text{ ou } x>\dfrac{14}{3}\right\}$

b) $S=\{x|x\in IR\}$

c) $S=\left\{x\in IR \middle| x>\dfrac{1}{3} \text{ ou } x<-\dfrac{5}{3}\right\}$

d) $S=\phi$

e) $S=\left\{x\in IR \middle| -\dfrac{5}{3}<x<\dfrac{1}{3}\right\}$

14- (Um.Bauru-SP) Assinale a alternativa que indica o domínio da função real $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$:

a) $\{x\in IR|-1<x<1\}$

b) $\{x\in IR|x\geq 1\}$

c) $\{x\in IR|x<-1 \text{ ou } x\geq 1\}$

d) $\{x\in IR|x\leq 1\}$

e) $\{x\in IR|x\geq 0\}$

15- Considere o sistema abaixo.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-1 \\ x+k^3y=k \end{cases}$$

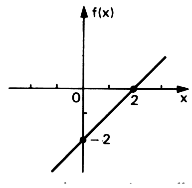
O conjunto formado por todos os valores reais de k, que tornam esse sistema possível, é:

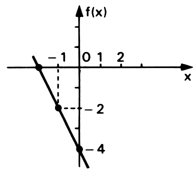
a) $\{-1,.0,.1\}$ b) $\{0,.1\}$ c) $\{-1,.0\}$

d) $\{-1,.1\}$ e) $\{0\}$

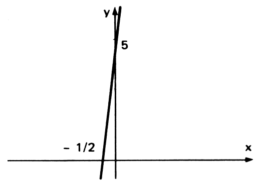
GABARITO

1- a) b)





c)



2- $a=\dfrac{1}{2}$ e $b=\dfrac{3}{2}$ 3- d 5- a 6- b 7- b 8- d 9- d

10-e 11-e 12- b 13- d 14- c 15- a