

CONJUNTOS

Conceitos iniciais

Conjunto: A noção de conjunto, em Matemática, é a mesma da linguagem corrente, ou seja, conjunto é sinônimo de agrupamento, coleção, classe etc.

Elemento: Os objetos que constituem determinado conjunto são chamados de elementos do conjunto.

Pertinência: Se um elemento é constituinte de um conjunto significa que ele pertence ao conjunto. Este fato é indicado pelo símbolo \in . Por exemplo, chamando de P o conjunto dos números pares, escrevemos: $2 \in P$ (2 pertence a P) e $3 \notin P$ (3 não pertence a P).

Embora os elementos de um conjunto possam ser quaisquer objetos (inclusive outros conjuntos), é costume representar os conjuntos com as letras maiúsculas e os elementos com as letras minúsculas.

Representação dos conjuntos

a) **Por enumeração:** Podemos representar um conjunto enumerando seus elementos.

Exemplos:

1- O Conjunto dos números pares positivos menores que 10 é: $\{2, 4, 6, 8\}$.

2- O conjunto dos números ímpares positivos é: $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$.

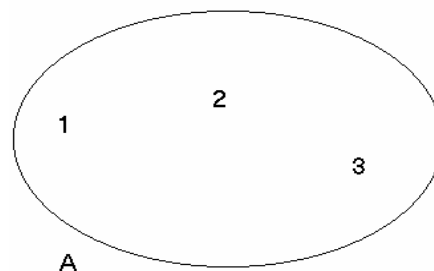
b) **Por propriedade:** Quando todos os elementos de um conjunto A , e somente eles, satisfazem a uma certa propriedade, podemos descrever o conjunto A especificando essa propriedade. Para isso, usamos o símbolo $\{ \mid \}$ (lê-se: “tal que”).

Exemplos:

1- $A = \{x \mid x \cdot é \cdot ímpar \cdot e \cdot 3 < x < 11\}$ é o conjunto $\{5, 7, 9\}$. ($3 < x < 11$ significa que x está compreendido entre 3 e 11; o sinal $<$ lê-se: “menor”).

2- $B = \{x \mid x \cdot é \cdot par \cdot e \cdot 0 < x < 8\}$ é o conjunto $\{2, 4, 6\}$.

c) **Por diagrama** Para a visualização geométrica dos conjuntos usam-se os chamados diagramas de Venn. O diagrama de Venn do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ está representado a seguir.



Conjunto vazio Chama-se vazio e indica-se por \emptyset o conjunto que não possui elemento algum.

Exemplos:

1- O conjunto dos meses do ano que começam pela letra c (na língua portuguesa).

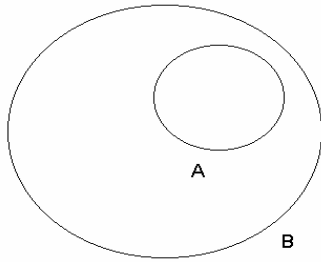
2- O conjunto dos números pares maiores que 4 e menores que 6.

Igualdade de conjuntos Dois conjuntos, A e B , são iguais quando têm os mesmos elementos.

OBS: Na definição de igualdade de conjuntos não há qualquer referência à ordem segundo a qual os elementos de um conjunto são escritos. Assim: $\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$ e $\{b, c, a\}$, por exemplo, são o mesmo conjunto. E mais: $\{a, b, b, c, c, c\}$ e $\{a, b, c\}$, por exemplo, são um único conjunto, pois ambos têm os mesmos elementos, apesar de b constar duas vezes e c três vezes no primeiro conjunto.

Subconjuntos de um conjunto Se A e B são dois conjuntos, pode ocorrer que todo elemento de A seja também elemento de B . Quando isso ocorre, dizemos que A é subconjunto de B ou que A é parte de B ou, ainda, que A

está contido em B . Indicamos esse fato por $A \subset B$ (leia: “ A está contido em B ”) ou por $B \supset A$ (leia: “ B contém A ”).



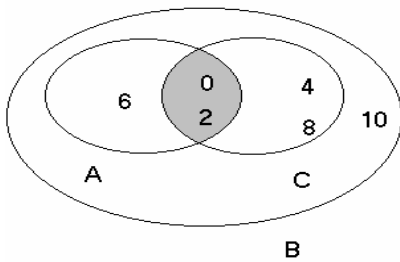
Se existir pelo menos um elemento de A que não pertença a B , então A não é subconjunto de B , fato este que se indica por $A \not\subset B$ (lê-se: “ A não está contido em B ”).

Exemplos:

1- O conjunto $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$, dos números pares positivos, é subconjunto do conjunto $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, formado por todos os números naturais ($A \subset B$).

2- O conjunto dos paraibanos é um subconjunto do conjunto de todos os brasileiros.

3- Para os conjuntos $A = \{0, 2, 6\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e $C = \{0, 2, 4, 8\}$.



Temos: $A \subset B$; $C \subset B$;

$A \not\subset C$ (pois $6 \in A$ e $6 \notin C$)

$C \not\subset A$ (pois $4 \in C$ e $4 \notin A$)

A definição de subconjunto induz a admitir que cada conjunto está incluído em si próprio: $A \subset A$.

OBS: O conjunto vazio está contido em todo conjunto; simbolicamente: $\emptyset \subset A$, para todo conjunto A .

Operações com conjuntos

Intersecção Se A e B são dois conjuntos quaisquer, sua intersecção é o conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a A e B .

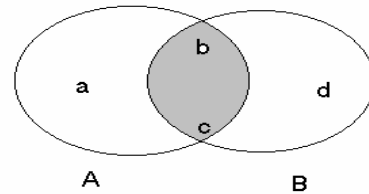
Indica-se a intersecção dos conjuntos A e B por $A \cap B$ (lê-se: “ A inter B ”).

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

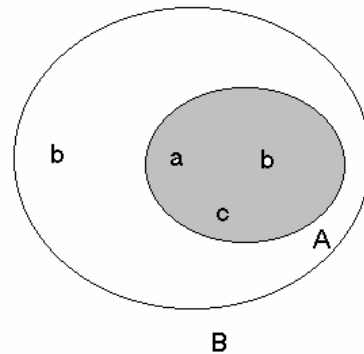
Se $A \cap B = \emptyset$, ou seja, se A e B não têm elemento em comum, dizemos que A e B são disjuntos.

Exemplos:

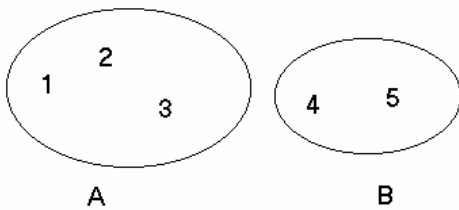
1- Sendo $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, c, d\}$, então $A \cap B = \{b, c\}$.



2- Sendo $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$, então $A \cap B = \{a, b, c\} = A$.



3- Sendo $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$, então $A \cap B = \emptyset$.



Da definição de intersecção de conjuntos concluímos facilmente as seguintes propriedades, válidas para todo conjunto A e B ;

$$A \cap A = A; A \cap \emptyset = \emptyset; A \cap B = B \cap A$$

União Se A e B são dois conjuntos quaisquer, sua união é o conjunto dos elementos que pertencem a A ou a B .

Indica-se a união dos conjuntos A e B por $A \cup B$ (lê-se: “ A união B ”).

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Exemplos:

1- Sendo $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{d, e\}$, então $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$.

2- Sendo $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, c, d\}$ então $A \cup B = \{a, b, c, d\}$.

3- Sendo $A = \{a, b\}$, então $A \cup \emptyset = \{a, b\} = A$.

Da definição de união de conjuntos concluímos as seguintes propriedades, válidas para todo conjunto A e B :

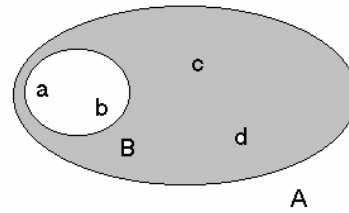
$$A \cup A = A; A \cup \emptyset = A; A \cup B = B \cup A$$

Diferença A diferença $A - B$ é o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B .

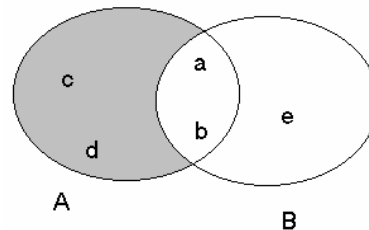
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Exemplos:

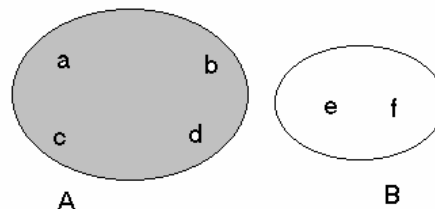
1- Sendo $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{a, b\}$, então $A - B = \{c, d\}$.



2- Sendo $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{a, b, e\}$ então $A - B = \{c, d\}$.



3- Sendo $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{e, f\}$ então $A - B = \{a, b, c, d\}$.

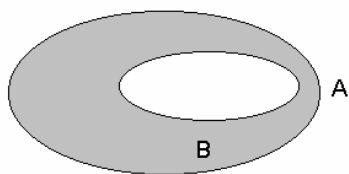


OBS: Quando $B \subset A$, a diferença $A - B$ chama-se conjunto complementar de B em relação a A . Indica-se o complementar de B em relação a A por C_A^B

Assim, simbolicamente, temos:

$$C_A^B = A - B, \text{ com } B \subset A$$

Exemplo: Se $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1\}$ (note que $B \subset A$), então $C_A^B = A - B = \{2, 3\}$.



Propriedade Representamos por $n(X)$ o número de elementos de um conjunto finito X qualquer; assim sendo $n(A), n(B), n(A \cup B)$ e $n(A \cap B)$ representam o número de elementos dos conjuntos $A, B, A \cup B$ e $A \cap B$, respectivamente.

Utilizando esta notação, podemos enunciar a seguinte propriedade, válida para todo conjunto A e B :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Acompanhe a explicação desta propriedade pelo exemplo seguinte. Sendo: $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, c, d, e\}$

Temos: $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$, $A \cap B = \{b, c\}$ e, portanto:

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 3 + 4 - 2 = 5 = n(A \cup B).$$

E, assim, verificamos numericamente por este exemplo a propriedade:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Conjuntos numéricos

Os números, cujas propriedades e cujas interações são o objetivo da álgebra elementar, são classificados da seguinte forma:

a) **Conjunto dos números naturais** Números naturais são aqueles que são utilizados na contagem dos elementos de um conjunto. Temos então:

$$IN = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

OBS: O zero é o número mais novo dos naturais. Os naturais positivos são representados pelo símbolo:

$$IN^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

b) **Conjunto dos números inteiros** Números inteiros são todos os números naturais e também os opostos dos naturais;

os opostos dos naturais são os números $-1, -2, -3, -4, \dots$

A operação subtração causou o surgimento do conjunto

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Alguns subconjuntos de Z merecem destaque, como:

$$Z^* = \{\dots, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\} \text{ (Inteiros não-nulos)}$$

$$Z_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \text{ (Inteiros não-negativos)}$$

$$Z_- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\} \text{ (Inteiros não-positivos)}$$

c) **Números Pares e ímpares** Um número inteiro é chamado de par quando pode ser dividido por 2. Eis o conjunto dos pares:

$$P = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

De modo contrário, um número inteiro é dito ímpar quando não pode ser dividido por 2. Eis o conjunto dos ímpares:

$$I = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

d) **Números Primos** Um número, diferente de 1 e de -1 , é chamado de primo quando pode ser dividido apenas por ele mesmo, o oposto dele mesmo, por 1 e por -1 .

e) **Conjunto dos números racionais** Chama-se racional todo número que é o quociente entre dois números inteiros.

Vamos agora apresentar alguns exemplos de números racionais:

- Os números inteiros.

Exemplo: O inteiro 2 é o quociente entre os inteiros 2 e 1 ou 4 e 2 ou -10 e -5 etc.; portanto,

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{-10}{-5}$$

- Os decimais exatos.

Exemplos: $1,3 = \frac{13}{10}$; $0,243 = \frac{243}{1000}$; $3,17 = \frac{317}{100}$

- Os decimais não exatos e periódicos (dízimas).

Exemplos:

$$0,222... = 0,\bar{2} = \frac{2}{9}$$

$$1,444... = 1,\bar{4} = 1 + 0,\bar{4} = 1 + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}$$

$$0,999... = 0,\bar{9} = \frac{9}{9} = 1$$

Agora vamos apresentar a definição formal de número racional, indicando por Q o conjunto formado por eles:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in Z, q \in Z, q \neq 0 \right\}$$

Pela definição dos inteiros e dos racionais, concluímos facilmente que: $IN \subset Z \subset Q$

f) **Conjunto dos números irracionais** O conjunto dos números irracionais é formado pelos números cujas formas decimais não são exatas nem periódicas. Facilmente podemos construir números decimais não exatos e não periódicos. Veja, por exemplo: 0,101001000100001..., onde o número de “zeros” aumenta de uma unidade após cada algarismo 1.

Números como esse, cuja representação contém infinitas casas decimais após a vírgula e onde não ocorre repetição de período como nas dízimas, não são números racionais; esses números são chamados de irracionais.

Veja agora mais alguns exemplos de números irracionais:

Exemplos:

$$\sqrt{3} = 1,7320508...$$

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488...$$

$$\pi = 3,141592654...$$

Representamos o conjunto dos números irracionais por I .

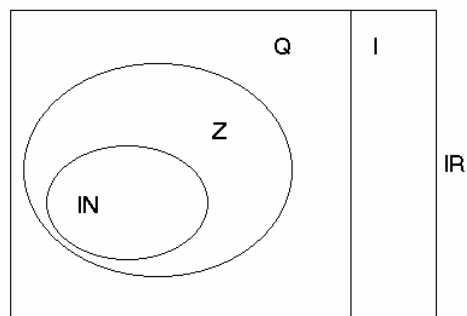
g) **Conjunto dos números reais** A união do conjunto Q dos números racionais com o conjunto I dos números irracionais chama-se conjunto dos números reais e representa-se por IR :

$$IR = Q \cup I$$

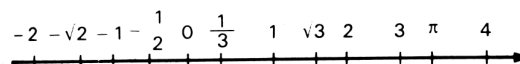
Pela definição dos racionais e dos reais, concluímos facilmente que:

$$IN \subset Z \subset Q \subset IR$$

Podemos, portanto fazer a seguinte representação:



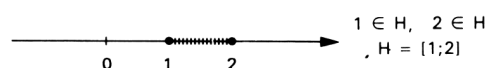
Os números reais podem ser representados numa reta de tal modo que a todo número real corresponde um ponto na reta e a todo ponto da reta corresponde um número real.



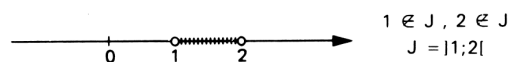
Intervalos lineares

Intervalos finitos Alguns subconjuntos de IR , por aparecerem frequentemente, têm nomes e notações especiais.

Por exemplo, o conjunto $H = \{x \in IR \mid 1 \leq x \leq 2\}$, formado por todos os números reais entre 1 e 2, incluindo os extremos 1 e 2, recebe o nome de *intervalo fechado de extremos 1 e 2* e passa a ser representado por $[1;2]$.

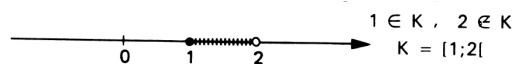


Já o conjunto $J = \{x \in IR \mid 1 < x < 2\}$ chama-se *intervalo aberto de extremos 1 e 2* e é representado por $]1;2[$.

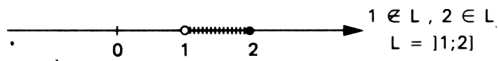


Outros casos possíveis:

$K = \{x \in IR \mid 1 \leq x < 2\}$ é o *intervalo fechado à esquerda e aberto à direita de extremos 1 e 2*. É representado por $[1;2[$.

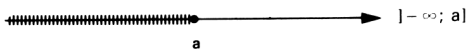


$L = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$ é o intervalo aberto à esquerda e fechado à direita de extremos 1 e 2. É representado por $]1; 2]$.

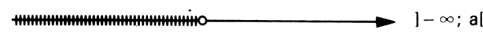


Intervalos infinitos Sendo a um número real qualquer, os intervalos infinitos são conjuntos da forma:

a) $]-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$



b) $]-\infty; a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$



c) $[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$



d) $]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$



e) $]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$



Por exemplo, o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ é o intervalo infinito $[1; +\infty[$.



EXERCÍCIOS

1- (Osec-SP) Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$ e $C = \{a, c, d, e\}$, então o conjunto $P = (A - C) \cup (C - B) \cup (A \cap B \cap C)$ é:

- a) $\{a, b, c, e\}$ b) $\{a, c, e\}$ c) A
 d) $\{b, d, e\}$ e) n.d.a.

2- (UFPB) O conjunto $\{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x < 3\}$ está contido em:

a) $\{x \in \mathbb{R}; -x \geq -3 \text{ e } -x < -2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R}; |x| \leq 2\}$

c) $\{x \in \mathbb{R}; |x| \leq 3\}$

d) $\{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x + 1 \leq 4\}$

e) $\{x \in \mathbb{R}; |x| < 1 \text{ ou } |x| \geq 4\}$

3- (Acafe-SC) Se $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e N são conjuntos tais que $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $M \cap N = \{1, 2, 3\}$, então o conjunto N é:

- a) vazio.
 b) impossível de ser determinado.
 c) $\{4, 5\}$.

d) $\{1, 2, 3\}$.

e) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

4- (FGV-SP) Seja A um conjunto com 8 elementos. O número total de subconjuntos de A é:

- a) 8 b) 256 c) 6 d) 128 e) 100

5- (Fatec-SP) Se $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x \leq 1\}$ e

$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 < 16\}$, então $(A \cup B) - (A \cap B)$ é o conjunto:

- a) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
 b) $\{-2, -1, 2, 3\}$
 c) $\{-3, -2, -1, 0\}$
 d) $\{0, 1, 2, 3\}$
 e) $\{0, 1\}$

6- Uma emissora de TV, durante a transmissão de um evento esportivo, propõe uma enquete aos telespectadores "internautas" a respeito de dois jogadores A e B convocados para a seleção brasileira de futebol. Depois de 30 minutos, obteve-se o seguinte resultado:

- Preferem o jogador A: 5000 pessoas
 Preferem o jogador B: 7000 pessoas
 Preferem ambos os jogadores: 2000 pessoas
 Não preferem nenhum deles: 1000 pessoas
 Quantas pessoas deram sua opinião?

- a) 3000 b) 150 c) 11000 d) 200 e) 2100

7- (UFPB) Três instituições de ensino, aqui denominadas por A , B e C , oferecem vagas para ingresso de novos alunos em seus cursos. Encerradas as inscrições dos candidatos, verificou-se que exatamente 540 deles se inscreveram para cursos de A e B , 240 para cursos de A e C , e 180 para cursos de A , B e C . Quantos candidatos se inscreveram em cursos de A e também em cursos de B ou C ?

- a) 700 b) 900 c) 950 d) 500 e) 600

8- (Vunesp) Numa classe de 30 alunos, 16 gostam de Matemática e 20, de História. O número de alunos desta classe que gostam de Matemática e de História é:

- a) exatamente 16.
b) exatamente 10.
c) no máximo 6.
d) no mínimo 6.
e) exatamente 18.

9- (PUC-SP) Um número racional qualquer:

- a) tem sempre um número finito de ordens (casas) decimais.
b) tem sempre um número infinito de ordens (casas) decimais.
c) não pode expressar-se em forma decimal exata.
d) nunca se expressa em forma de uma decimal inexata.
e) nenhuma das anteriores.

10- (Fuvest-SP) O número x não pertence ao intervalo aberto de extremos -1 e 2 . Sabe-se que $x < 0$ ou $x > 3$. Pode-se então concluir que:

- a) $x \leq -1$ ou $x > 3$ b) $x \geq 2$ ou $x < 0$
c) $x \geq 2$ ou $x \leq -1$ d) $x > 3$
e) n.d.a

11- (UF-Viçosa) Sejam os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 5\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 6\}.$$

Assinale a alternativa CORRETA;

- a) $A \cap B = \{2, 3, 4\}$
b) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$
c) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$
d) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$
e) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 5\}$

12- Em uma universidade, 80% dos alunos lêem o jornal A e 60% o jornal B . Sabendo que todo aluno é leitor de pelo menos um dos jornais, qual o percentual de alunos que lêem ambos?

- a) 40% b) 60% c) 80% d) 120% e) n.d.a.

13- Calcule o número de elementos do conjunto $A \cup B$, sabendo que A , B e $A \cap B$ são conjuntos com 90, 50 e 30 elementos, respectivamente.

- a) 110 b) 100 c) 130 d) 90 e) n.d.a.

14- (Fatec-SP) O conjunto A tem 20 elementos, $A \cap B$ tem 12 elementos e $A \cup B$ tem 60 elementos. O número de elementos do conjunto B é:

- a) 28 b) 36 c) 40 d) 48 e) 52

GABARITO

- 1- a 2- c 3- d 4- b 5- b 6- c 7- e 8- c
9- d 10- a 11- e 12- a 13- a 14- e