



Matrizes

Matrizes são tabelas com números ordenadamente dispostos em linhas e colunas, as quais são indicadas por uma letra maiúscula e representadas por colchetes e parênteses.

Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 20 \end{bmatrix}$$

$$C = [7 \quad 40 \quad 2 \quad 0 \quad 6]$$

Representação Genérica de uma Matriz

Para representarmos genericamente um elemento (ou termo) de uma matriz A utilizaremos " a_{ij} ", onde " i " representa a linha e " j " representa a coluna onde o termo se encontra em um determinado número de linhas " m " por colunas " n ", assim $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

A leitura da matriz acima será: matriz A , dos elementos a_{ij} , do tipo m por n .

Obs.: Para sabermos o número de elementos de uma matriz basta multiplicarmos o número de linhas " m " por o número de colunas " n ".

Lei de formação

A lei de formação de uma matriz será uma forma para representarmos uma matriz de forma reduzida.

$$B = (b_{ij})_{m \times n} \quad \text{Lei de formação}$$

Exemplo:

$$A = (a_{ij})_{3 \times 3} \quad a_{ij} = i + j$$

$$a_{31} = 3 + 1 = 4$$

$$a_{32} = 3 + 2 = 5$$

$$a_{33} = 3 + 3 = 6$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Tipos de Matrizes

Existem algumas matrizes, as quais recebem nomes especiais:

Matriz Coluna

É a matriz que possui apenas uma coluna, ou seja, matriz do tipo $m \times 1$ (" m " por um), onde $m \in \mathbb{N}^*$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{i1} \end{pmatrix}_{m \times 1}$$

Exemplos de uma matriz coluna:

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad C = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}_{2 \times 1}$$

Matriz Linha

É a matriz que possui apenas uma linha, ou seja, matriz do tipo $1 \times n$ (um por " n "), onde $n \in \mathbb{N}^*$.

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \cdots \quad a_{1j})_{1 \times n}$$

Exemplos de uma matriz linha:

$$U = (2 \quad 0 \quad 3 \quad 4)_{1 \times 4}$$

$$W = (3 \quad 7 \quad 7 \quad 7 \quad 0)_{1 \times 5}$$

Matriz Nula

Quando todos os elementos de uma matriz são iguais a "zero".

Exemplo:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \quad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

Matriz Quadrada

É a matriz que possui o número de linhas igual ao número de colunas, ou seja, uma matriz do tipo $m \times m$, a qual $m \in \mathbb{N}^*$.



$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times m}$$

OBS: Onde $i = j$

Exemplos de matrizes quadradas:

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 20 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 50 & 10 & 0 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Obs.: Em uma matriz quadrada sempre teremos duas diagonais:

Diagonal Principal

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 50 & 10 & 0 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Diagonal Secundária

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 50 & 10 & 0 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Matriz Triangular

Teremos uma matriz triangular quando em uma matriz quadrada $a_{ij} = 0$ para $i < j$, ou $a_{ij} = 0$ para $i > j$, ou seja:

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Matriz Diagonal

É a matriz quadrada em que todos os elementos acima e abaixo da diagonal principal são iguais a zero.

Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Matriz Identidade

É a matriz diagonal a qual os elementos da diagonal principal são iguais a um.

Exemplos:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$I_1 = [1]_{1 \times 1}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Igualdade de matrizes

As matrizes serão iguais quando os elementos e suas posições comparados são iguais e o número de linhas e colunas das matrizes comparadas são também iguais.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 8 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad e$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 8 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad ; \text{ Logo } A=B, \text{ pois:}$$

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \text{ com a ordem (tipo) de } A = B.$$

Adição e Subtração de matrizes

Para que aconteça uma adição ou uma subtração entre matrizes a ordem (tipo) das matrizes terá que ser iguais.



Exemplo:

Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

Encontre $A+B$ e $A-B$:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2+1 & 5+1 & 6+3 \\ 9+0 & 4+2 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 5-1 & 6-3 \\ 9-0 & 4-2 & 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de uma Matriz por um número real

A multiplicação será efetuada quando todos os elementos da matriz forem multiplicados por este número real.

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, então $3A$ será:

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 15 & 9 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

A Matriz Transposta de uma Matriz

Matriz transposta é aquela que linhas da matriz dada ordenadamente tornam-se colunas.

Exemplos:

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 20 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$$

$$U = (2 \ 0 \ 3 \ 4) \Rightarrow U^t = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Matriz Simétrica

É a matriz quadrada que a transposta é igual à matriz dada.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 0 & -7 \\ 1 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 0 & -7 \\ 1 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

Logo A é uma matriz simétrica.

Matriz Anti-Simétrica

É a matriz que quando fazemos a sua transposta obteremos a matriz oposta (a qual é a matriz dada multiplicada por -1). E a diagonal principal é igual à zero.

Exemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -5 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes

Para multiplicamos duas matrizes é necessário que o número de colunas da primeira seja igual ao número de linhas da segunda e o resultado será o número de linhas da primeira com o número de colunas da segunda.



Exemplo de multiplicação de matrizes:

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$, então AB

será:

Como o número de colunas de A ($n=3$) é igual ao número de linhas de B ($m=3$) podemos efetuar a operação, que terá como resultado uma matriz do tipo 2×1 .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix}_{2 \times 1}$$

Obs.: Cada elemento é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha "i", da primeira matriz neste caso a matriz A , pelos elementos da coluna "j", da segunda matriz, no caso B , e somando-se os produtos obtidos.

Matriz inversa de uma matriz

A matriz inversa será aquela que multiplicada com a matriz quadrada dada seu resultado será igual à matriz identidade.

Exemplo:

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ sua inversa é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,

pois $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Onde $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz identidade I_2 .

Exercícios

1- Dada a Matriz $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$, podemos dizer que:

- É uma matriz quadrada do tipo 1×4 .
- É uma matriz linha do tipo 4×1 .
- É uma matriz coluna do tipo 1×4 .
- É uma matriz identidade do tipo 1×4 .
- É uma matriz coluna do tipo 4×1 .

2- De uma tabela de certa empresa de aguardente, foi feita a seguinte matriz $R = (a_{ij})_{2 \times 3}$ | $a_{ij} = 2i + j$. Então, qual é esta matriz?

a) $R = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

b) $R = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & 10 \\ 20 & 7 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

c) $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

d) $R = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ e) $R = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

3- Qual é a matriz transposta (A^t), se

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$?

a) $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 5 & 5 & 6 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ b) $A^t = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

c) $A^t = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ d) $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

e) $A^t = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

4- Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$,

Calcule:

- a) $A+B+C$ b) $A+B-C$ c) $A-B+C$
d) $A-B-C$

5- Calcule a e b sabendo que a matriz dada é simétrica.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & a \\ 3 & 6 & b+1 \\ -4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$



6- Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

determine:

a) A^2 , em que $A^2 = AA$

b) B^2 , em que $B^2 = BB$

c) $(A+B)(A-B)$

d) $A^2 - B^2$

Determinantes

Sendo A uma matriz quadrada de ordem n, chama-se determinante de A, representado por $\det(A)$, ao número que se pode obter, operando com os elementos.

Determinante de uma matriz de ordem 1

$$A = [a_{11}] = \det(A) = |a_{11}| = a_{11}$$

Determinante de uma matriz de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Determinante de uma matriz de ordem 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$

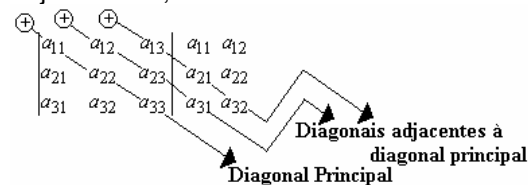
Podemos também obter o determinante de uma matriz de terceira ordem utilizando a regra de Chió e o teorema de Laplace. Mas primeiro vamos conhecer a regra de Sarrus e as propriedades dos determinantes.

Regra de Sarrus

Para calcularmos o determinante de uma matriz quadrada A de terceira ordem basta; 1ª) Repetirmos a 1ª e a 2ª coluna para o lado direito do determinante;

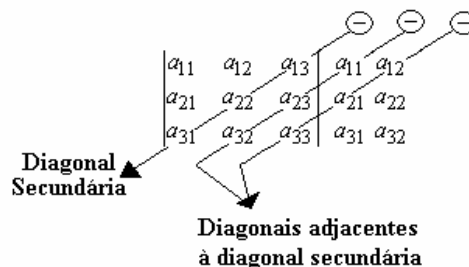
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

2ª) Somamos os resultados das multiplicações dos elementos da diagonal principal e das suas diagonais adjacentes e;



$$(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32})$$

3ª) Subtraímos os resultados das multiplicações dos elementos da diagonal secundária e das diagonais adjacentes à diagonal secundária;



$$-(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$

Assim;

$$\det(A) = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$

Exemplo:

Calcule o determinante da matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \cdot 3) - (3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 4) = 3$$

Propriedades dos determinantes

1ª propriedade: Matriz com uma fila nula

Se numa matriz quadrada todos os elementos de uma fila (uma linha ou uma coluna) são nulos, então o correspondente determinante é nulo.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 213 \\ 0 & 55 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B) = 0$$

2ª propriedade: Determinante de matriz triangular

O determinante de qualquer matriz triangular é igual ao produto dos elementos de sua diagonal principal.



Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1 \cdot 7 \cdot 2 = 14$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 213 \\ 0 & 55 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B) = 1 \cdot 55 = 55$$

3ª propriedade: Determinante de uma matriz que a fila de uma matriz dada é multiplicada por um número real

Quando todos os elementos de uma linha (ou uma coluna) são multiplicados por um número "N", então o determinante desta matriz também é multiplicado por este número "N".

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 7, \quad \text{mas se}$$

multiplicarmos a primeira linha (L_1) por 3 teremos :

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B) = 9 \cdot 5 - 6 \cdot 4 = 21$$

Mas como já tínhamos o $\det(A)$, bastava:

$$\det(B) = 3 \det(A) = 3 \cdot 7 = 21$$

4ª propriedade: Determinante de uma matriz, a qual é a matriz dada multiplicada por uma constante "K"

Se multiplicarmos uma matriz A de ordem n, por um número real "k", então obteremos uma matriz B, tal que:

$$\det(B) = k^n \cdot \det(A)$$

Onde:

$K = \text{constante}$

$n = \text{ordem da matriz}$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ Se fizermos } B=3A, \text{ teremos:}$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} \text{ Logo, o } \det(B) = 3^2 \det(A)$$

5ª propriedade: Troca de filas paralelas

Se trocarmos de posição duas filas paralelas de uma matriz A, obteremos um novo determinante de sinal contrário ao determinante da matriz A.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \text{ trocando a segunda coluna no lugar da}$$

$$\text{primeira teremos } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}:$$

$$\det(A) = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 \Rightarrow \det(A) = 7$$

$$\det(B) = 3 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \Rightarrow \det(B) = -7$$

$$\det(A) = - \det(B)$$

6ª propriedade: Determinante de uma matriz com duas filas iguais

O determinante de uma matriz A com duas filas iguais será igual à zero.

$$\det(A) = 0$$

7ª propriedade: Determinante de uma matriz com filas proporcionais

Se uma matriz A que possui uma fila (linha ou coluna) proporcional à outra, o determinante será igual à zero.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 0, \text{ pois a } 2^{\text{a}} \text{ coluna é o triplo da } 1^{\text{a}} \text{ coluna.}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B) = 0, \text{ pois a } 3^{\text{a}} \text{ linha é o dobro da } 1^{\text{a}} \text{ linha.}$$

8ª propriedade: Determinante da matriz transposta

O determinante de uma matriz transposta será igual ao determinante da matriz dada.

$$\det(A^t) = \det A$$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A^t) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

9ª Propriedade: Teorema de Binet

Sendo A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem e AB o produto das matrizes, então $\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B)$.

Exemplo:



$$\text{Temos } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 7$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B) = -6 \text{ e}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(AB) = -42, \text{ então}$$

$$\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B) \Rightarrow -42 = 7 \cdot (-6)$$

10ª propriedade: Teorema de Jacobi

Se multiplicarmos uma linha (ou coluna) de uma matriz quadrada "A" por um número e depois somarmos a outra linha (ou coluna) assim formando outra matriz, ou seja, uma matriz "B", os determinantes destas duas matrizes serão iguais, assim **det (A) = det (B)**.

Exemplo:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 5 = -7$ Se multiplicarmos a 2ª linha por (-3) e depois somarmos a 1ª linha teremos:

$$B = \begin{pmatrix} -12 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B) = -12 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) = -7 \text{ Portanto, } \det(A) = \det(B)$$

11ª propriedade: Determinante da inversa

O determinante de uma matriz inversa A^{-1} é igual ao inverso do determinante da matriz A, ou seja, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Exemplo: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

pois $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$;

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E o $\det(A) = 2$, então;

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{2} \text{ De fato, pois:}$$

$$\det(A^{-1}) = 0 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}$$

Obs.: Uma matriz **A** só terá inversa A^{-1} se o seu determinante for diferente de zero, $\det(A) \neq 0$.

Regra de Chió

Para regra de Chió se tornar mais prática precisamos de uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$, com $a_{ij} = 1$.

Seguem as etapas:

- **1ª etapa:** eliminamos da matriz dada a linha i e a coluna j do elemento $a_{ij} = 1$;
- **2ª etapa:** subtraímos de cada um dos elementos restantes de A o produto dos elementos eliminados que se encontram na sua linha e na sua coluna, obtendo assim uma matriz B de ordem $n - 1$;
- **3ª etapa:** o determinante de A é igual ao determinante de B .

Exemplo

Calcule o determinante da matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- Vamos aplicar a regra de Chió a partir do elemento $a_{24} = 1$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ \boxed{1} & 4 & 2 & \boxed{1} \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

A partir daqui teremos:

$$B = \begin{bmatrix} 2 - (1 \cdot 0) & 3 - (4 \cdot 0) & -1 - (2 \cdot 0) \\ 3 - (1 \cdot 0) & 2 - (4 \cdot 0) & 2 - (2 \cdot 0) \\ -1 - (1 \cdot 2) & 2 - (4 \cdot 2) & 3 - (2 \cdot 2) \end{bmatrix}$$

Então:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$\det A = \det B = 35$$

Teorema de Laplace

Para entendermos o teorema de Laplace teremos que entender o que é um cofator ou adjunto.

Obteremos um cofator do elemento a_{ij} , ou seja, o cofator A_{ij} do seguinte modo:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Onde:

$$A_{ij} = \text{cofator do } a_{ij};$$



D_{ij} = o determinante da matriz, suprimindo sua linha de ordem i e sua coluna de ordem j (menor complementar).

Exemplo:

Seja $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix}$, o cofator de a_{12} será:

$$D_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -26$$

Então: $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot D_{12} = (-1)^3 \cdot (-26) = 26$

Sabendo como calcular o cofator, podemos conhecer o teorema de Laplace que diz o seguinte:

“O determinante de uma matriz quadrada A de ordem $n \geq 2$ é o número que se obtém pela soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) por seus respectivos cofatores”

Exemplo do teorema de Laplace:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule o determinante da matriz A :

Utilizando o teorema de Laplace e escolhendo a 1ª linha (L_1) teremos:

$$\det(A) = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + (-3) \cdot A_{13} + 2 \cdot A_{14} =$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 0 - 0 \cdot 12 + (-3) \cdot (-12) - 2 \cdot (-8) = 52$$

$\det(A) = 52$

Onde: A_{11} = Cofator do elemento a_{11} ; A_{12} = cofator do elemento a_{12} , e assim sucessivamente.

Exercícios

1- Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{vmatrix}$

2- Calcule $\det(A)$, sendo:

a) $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de 2ª ordem, com $a_{ij} = i^2 + ij$;

b) A é a matriz dos coeficientes das incógnitas do sistema $\begin{cases} 7x - 3y = 10 \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}$, na posição em que aparecem.

3- Resolva a equação $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & x \\ 2 & x & -3 \end{vmatrix} = 2$

4- Se $\det(A) = 20$, calcule $\det(A^t)$.

5- Se $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 10$, calcule:

a) $\det(B) = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$

b) $\det(B) = \begin{vmatrix} 4a & 4b \\ c & d \end{vmatrix}$

6- Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 tal que $\det(A) = m$. Calcule $\det(2A)$ em função de m .

7- Sendo $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$, calcule $\det(A^{-1})$.

8- Se $\det A = 10$, qual é o determinante de A^{-1} ?

9- Aplicando o teorema de Laplace, calcule

$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ e $\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ 10- Se

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}$, calcule:

a) D_{23} b) D_{13} c) D_{11}

11- Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

determine A_{21} e A_{33} :

Sistemas de equações lineares

Um sistema de equação linear $m \times n$ é todo conjunto de m equações lineares por n incógnitas:

Exemplos:



Vejamos um sistema linear 2×2 , ou seja, formado por duas equações lineares com duas incógnitas, x e y :

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

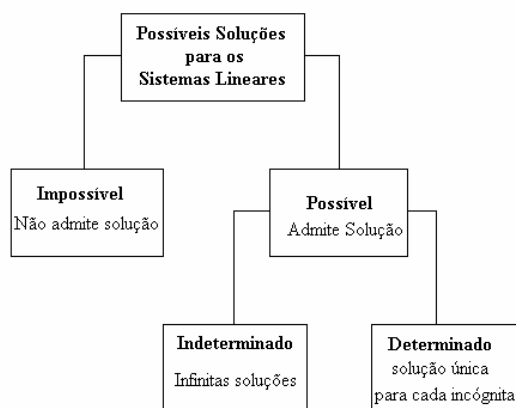
Sistema linear 3×2 são três equações lineares e duas incógnitas;

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 6 \\ 2x - y = 14 \end{cases}$$

Outro sistema linear agora 3×3 onde temos três equações e três incógnitas A, B, C ;

$$\begin{cases} A + B + C = 20 \\ B - C = 6 \\ A - B = 14 \end{cases}$$

Solução do sistema linear



Dizemos que é uma solução de um sistema linear toda seqüência ordenada de números reais que verifica ao mesmo tempo todas as equações do sistema.

Exemplos:

Quais as soluções dos sistemas abaixo:

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 6 \end{cases}$

A solução do sistema será $x = 8$ e $y = 2$, pois:

$$\begin{cases} 8 + 2 = 10 \\ 8 - 2 = 6 \end{cases}, \text{ logo } \textbf{possível e determinável}.$$

b) $\begin{cases} D + E + F = 4 \\ 2D + E - F = 3 \end{cases}$

Algumas das possíveis soluções serão $D = 1, E = 2$ e $F = 1$, pois:

$$\begin{cases} 1 + 2 + 1 = 4 \\ 2 \cdot 1 + 2 - 1 = 3 \end{cases}, \text{ ou ainda}$$

$$\begin{cases} (-1) + 5 + 0 = 4 \\ 2 \cdot (-1) + 5 - 0 = 3 \end{cases} \text{ com}$$

$$D = -1, E = 5 \text{ e } F = 0$$

,ou seja, esse sistema é **possível e indeterminado**.

c) $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ não existe solução para esse sistema,

pois, resolvendo este sistema temos que $0 = -1$, portanto este sistema é **impossível**.

Obs.: Para discutirmos um sistema basta analisarmos a solução em função dos seus parâmetros.

1) Sistema possível e determinado:

Número de equações = Número de incógnitas

2) Sistema possível e indeterminado:

Número de equações < Número de incógnitas

3) Sistema impossível:

Sentença falsa

Regra de Cramer

Para calcularmos uma solução para um sistema linear $n \times n$, podemos usar a regra de Cramer, observe o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + \dots + a_{1n}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + \dots + a_{2n}z = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x + a_{n2}y + \dots + a_{nn}z = b_n \end{cases}$$

Segundo a regra devemos:

1) Calcular o determinante da matriz A , formada pelas incógnitas do sistema:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2) Calcular os determinantes das matrizes obtidas da matriz A , substituindo a coluna dos coeficientes de X, Y e Z pela coluna dos termos independentes:



$$\det X = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det Y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det Z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

Sabendo disso a solução do sistema é:

$$x = \frac{\det X}{\det A} \quad y = \frac{\det Y}{\det A} \quad \dots \quad z = \frac{\det Z}{\det A}$$

Exemplo:

Dado o sistema $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 4x + y = 9 \end{cases}$, qual sua solução?

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

$$\det X = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = -22$$

$$\det Y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -11$$

$$x = \frac{\det X}{\det A} = \frac{-22}{-11} = 2$$

$$y = \frac{\det Y}{\det A} = \frac{-11}{-11} = 1$$

Solução será $x = 2$ e $y = 1$, ou seja, $S = \{(2,1)\}$.

Exercícios

1) Verifique se:

a) $(3,-1)$ é uma solução do sistema:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$$

b) $(4, 1, 3)$ é uma solução do sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 6 \\ x + 3y + 2z = 13 \end{cases}$$

c) $(5, 2)$ é solução do sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

d) $(1, 2, 3)$ é uma solução do sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y + 5z = 15 \end{cases}$$

2) Classifique e resolva os sistemas lineares:

a) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5y = 20 \\ 4x + 10y = 40 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 2y - z = 1 \\ 2z = -6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y + z - w = 0 \\ y + z + w = 5 \\ -z - 2w = 1 \\ -w = 2 \end{cases}$

3) Os sistemas $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 4 \end{cases}$ e $\begin{cases} ax + 2y = 32 \\ 3x - by = 20 \end{cases}$ são equivalentes, ou seja, possuem a mesma solução. Calcule a e b.

4) Sejam os sistemas $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ e

$$\begin{cases} Kx + y = 3K + 5 \\ x + y = 2 \end{cases}, \text{ com } K \in \mathfrak{R}. \text{ Calcule K para que os}$$

sistemas sejam equivalentes.

5) resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ x + 2y + z + w = 2 \\ x + y + 2z + w = 3 \\ x + y + z + 2w = 4 \end{cases}$$



6) Resolva a equação matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

7) Determine o valor de W no sistema

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x - y + w = 1 \\ y + z - 2w = 0 \\ 4y + 3z = 7 \end{cases}$$

8) Verifique se o sistema $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$ é determinado ou indeterminado.

Gabarito

Matrizes

1) e 2) a 3) d 5) a = - 4 e b = 4

Determinantes

1) a)10 b)0 c) -24 d) -60000 2) a)-2 b) 29 3)x=2 ou x=1 4) 20 5) a) -10 b) 40 6) 8m 7)1 8) 0,1

Sistemas lineares

1) a) sim b) sim c) não c) não 2) todos possíveis e determinados 3) $\frac{4}{3}$ e 2 4) -2 5) $\{(-1,0,1,2)\}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 7)

8) determinado

Exercícios de vestibulares

1 (PSS – 2008) Em um campeonato de futebol de salão, as três equipes classificadas (**X**, **Y** e **Z**) marcaram juntas um total de 115 *gols*. A equipe **X** marcou 12 *gols* a mais do que a **Z**, e 8 *gols* a mais do que a **Y**. Nessas condições, é correto afirmar que a equipe **Y** marcou:

- a) 33 *gols* c) 38 *gols* e) 45 *gols*
b) 37 *gols* d) 40 *gols*

2 (PSS – 2008) Maria, Beth, Joana e Socorro foram fazer compras em uma loja onde três itens do vestuário feminino estavam em promoção: calças, blusas e cintos. Todos os modelos e tamanhos de cada um desses itens estavam com o mesmo preço. Ao final das compras, verificou-se que:

- Maria gastou R\$ 100,00 ao comprar três calças, uma blusa e um cinto;
- Beth gastou R\$ 80,00 ao comprar uma calça, duas blusas e dois cintos;
- Joana gastou R\$ 60,00 ao comprar três blusas e um cinto;

- Socorro comprou apenas uma calça, uma blusa e um cinto.

De acordo com essas informações, é correto afirmar que, nessas compras, Socorro gastou:

- a) R\$ 45,00 c) R\$ 52,00 e) R\$ 40,00
b) R\$ 50,00 d) R\$ 55,00

3 (PSS – 2008) Um recipiente contendo $6 m^3$ de água será esvaziado, de modo que no instante t a quantidade de água restante $V(t)$, em m^3 , será dada pela expressão $V(t) = 6[1 - \det A(t)]$, $t \in [0, 30]$, onde $A(t)$ é a matriz

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi t}{60}\right) & 0 & \sin\left(\frac{\pi t}{60}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi t}{60}\right) & 1 & -\cos\left(\frac{\pi t}{60}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi t}{60}\right) & \sin\left(\frac{\pi t}{60}\right) & \sin\left(\frac{\pi t}{60}\right) \end{bmatrix}.$$

Com base nessas informações, é correto afirmar que o volume de água, no recipiente, será de $3 m^3$ no instante:

- a) $t = 12$ c) $t = 20$ e) $t = 30$
b) $t = 15$ d) $t = 10$

4 (PSS – 2007)

Três cidades distintas foram representadas em um mapa (plano) pelos pontos C_1 , C_2 e C_3 . Considere a matriz $D = (d_{ij})_{3 \times 3}$, onde d_{ij} é a distância entre C_i e C_j , $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$. Nesse contexto, considere as seguintes afirmações:

- Se C_1 , C_2 e C_3 são vértices de um triângulo equilátero, D é uma matriz cujos elementos são todos iguais.
- A matriz D é simétrica.
- O determinante da matriz D é nulo.

Está(ão) correta(s) apenas:

- a) I c) III e) II e III
b) II d) I e II

5 (PSS – 2006) Sendo θ um número real, considere a

matriz $M = \begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}$ e as seguintes

afirmações:

- O determinante da matriz M é igual a 1.
- A matriz M é inversível.
- A matriz M é igual a sua transposta, para todo valor de θ .

É(são) verdadeira(s) apenas:

- a) I c) III e) II e III
b) II d) I e II



6 (PSS – 2006) Marilei vende, em reais, sacolas descartáveis dos tipos I, II e III, a preços de x , y e z , respectivamente. Os resultados de suas vendas, ao longo de três dias consecutivos, estão representados na tabela abaixo.

Dias	Sacolas Tipo I	Sacolas Tipo II	Sacolas Tipo III	Total (R\$)
Primeiro	0	1	2	13,00
Segundo	5	2	1	21,00
Terceiro	5	1	1	18,00

Com base nessa tabela, o valor de $x + y + z$ é igual a:

- a) R\$ 30,00 c) R\$ 20,00 e) R\$ 10,00
b) R\$ 25,00 d) R\$ 15,00

7 (pss – 2006) Sendo I a matriz identidade de ordem 2 e M uma matriz 2×2 , tal que $M^3 = 8I$, então o determinante de M é igual a:

- a) 64 c) 4 e) 1
b) 8 d) 2

8 (pss – 2006) Considere o sistema abaixo.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \\ x + k^3 y = k \end{cases}$$

O conjunto formado por todos os valores reais de k , que tornam esse sistema possível, é:

- a) $\{-1, 0, 1\}$ c) $\{-1, 0\}$ e) $\{0\}$
b) $\{0, 1\}$ d) $\{-1, 1\}$

9 (pss – 2005) Se a soma de três números inteiros pares consecutivos é igual a 18, então a soma de seus quadrados é igual a

- a) 110 c) 136 e) 120
b) 116 d) 80

10 (pss – 2005)

Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

e $C = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}$, onde $x, y \in \mathbb{R}$. Sabendo-se

que $AB = C$, o valor da expressão $x^2 - y^2$ é

- a) -16 c) -9 e) 4
b) 16 d) 9

11 (pss – 2005) Alfredo pesou uma certa quantidade de arroz, feijão e milho e verificou que o arroz e o feijão juntos pesaram 40 kg; o feijão e o milho, 55 kg e o arroz e o milho 45 kg. O arroz, o milho e o feijão juntos pesaram:

- a) 50 kg c) 70 kg e) 90 kg
b) 60 kg d) 80 kg

12 (pss – 2005)

Se X é uma matriz 2×2 tal que $(A + X)^t = B$,

onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, então o

determinante de X é igual a

- a) 0 c) -10 e) -12
b) 10 d) 5

13 (PSS – 2005)

Se $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ são tais que $ax + by = 0$, $bx + ay = 0$ e $(a - b)(x^2 + y^2) \neq 0$, então:

- a) $a + b = 1$ c) $a + b = -1$ e) $a^2 - b^2 = -1$
b) $a + b = 0$ d) $a^2 - b^2 = 1$

14 Unifesp

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & \sin x & 0 \\ 0 & 2 & \cos x \end{pmatrix}$$

Calcule:

- a) o determinante da matriz A
b) o valor máximo

a) $\det A = \frac{1}{2} \sin 2x + 8$ b) $v \text{ máx} = 8,5$

respostas:

1	2	3	5	6	7	8	9	10	11	12	13
b	c	d	d	e	c	a	b	a	c	e	b